سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

۱

حالت‌های زیر ممکن است:

۱) اگر هزارگان برابر ۷ باشد، به سه طریق می‌توان ۸ را در یکان، دهگان یا صدگان قرار داد و پس از آن دو رقم باقی‌مانده یکی ۸ حالت و دیگری ۷ حالت ممکن دارند. پس تعداد این حالت‌ها برابر $۱\times۳\times۸\times۷=۱۶۸$ است.

۲) اگر صدگان برابر ۷ باشد، به دو طریق می‌توان ۸ را در دهگان یا یکان قرار داد. پس از آن هزارگان ۷ حالت و رقم باقی‌مانده هم ۷ حالت دارد. پس تعداد این حالت‌ها برابر $۱\times۲\times۷\times۷=۹۸$ است.

۳) اگر دهگان برابر ۷ باشد، یکان برابر ۸ خواهد بود. پس از آن هزارگان ۷ حالت و صدگان هم ۷ حالت دارد. پس تعداد این حالت‌ها برابر $۱\times۱\times۷\times۷=۴۹$ است.

بنابراین تعداد کل حالت‌های مطلوب برابر است با: $۱۶۸+۹۸+۴۹=۳۱۵$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲

تعداد جایگشت‌هایی که log در آن‌ها دیده می‌شود، برابر است با: !۷

$\boxed{\text{log}}$arithm

تعداد جایگشت‌هایی که rithm در آن‌ها دیده می‌شود، برابر است با: !۵

loga$\boxed{\text{rithm}}$

تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها log و rithm دیده می‌شود، برابر است با: !۳

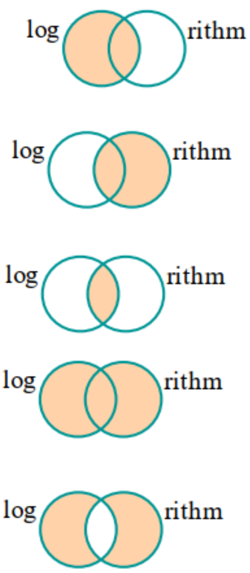
$\boxed{\text{log}}$a$\boxed{\text{rithm}}$

بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها حداقل یکی از دو عبارت دیده می‌شود برابر است با:

$۷!+۵!-۳!$

و در نتیجه تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها فقط log یا فقط rithm دیده می‌شود، برابر است با:

$۷!+۵!-۳!-۳!=۵۱۴۸$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳

راه‌حل اول:

نکته: اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به‌صورت !n نمایش می‌دهیم. قرارداد می‌کنیم: $۰!=۱$

نکته: تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $P(n,r)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد دروس برابر ۳ است. اگر تعداد دبیران را n فرض کنیم، قرار است تعداد جایگشت‌های ۳ عضوی از بین n عضو برابر ۱۲۰ باشد. بنابراین:

$$P(n,۳)=۱۲۰ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۳)!}=۱۲۰ \Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۱۲۰$$

حاصل‌ضرب سه عدد متوالی برابر ۱۲۰ شده است. با توجه به گزینه‌ها، این اعداد ۶، ۵ و ۴ هستند. بنابراین $n=۶$.

راه‌حل دوم:

اگر تعداد دبیرها را n فرض کنیم، این معاون برای دبیر درس آمار، n حالت، برای دبیر درس ریاضی $n-۱$ حالت و برای دبیر هندسه $n-۲$ حالت انتخاب دارد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل انتخاب‌ها برابر $n(n-۱)(n-۲)$ است.

طبق فرض سؤال این مقدار برابر ۱۲۰ است. بنابراین پاسخ گزینهٔ ۳ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴ نکته (جایگشت): هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت nتایی از آن اشیاء می‌گوییم و برابر است با: $n!$

نکته (تبدیل r شیء از میان n شیء): تعداد حالت‌های انتخاب و چینش r شیء از میان n شیء متمایز (ترتیب اشیاء مهم است و با جابه‌جایی هریک، حالت جدیدی به وجود می‌آید) برابر است با:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

وقتی قرار است هیچ دو مردی کنار هم قرار نگیرند، ابتدا خانم‌ها را در صف قرار می‌دهیم که به $۵!$ حالت ممکن است. حال از بین ۶ مکان ممکن، ۴ مکان برای مردها وجود دارد.

(دایره‌ها مکان‌های ممکن برای مردان است. ○ Z ○ Z ○ Z ○ Z ○ Z ○)

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۵!P(۶,۴)=۵!\times\frac{۶!}{۲!}=۵!۶!\times\frac{۱}{۲}$$

اما در حالتی که مردان یک‌درمیان باشند، ابتدا خانم‌ها را به $۵!$ حالت قرار می‌دهیم. ۳ حالت برای یک‌درمیان بودن مردان داریم:

$$\left.\begin{array}{l}
Z\ M\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ M\ Z \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} ۵!\times۴! \\
Z\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ M \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} ۵!\times۴! \\
M\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ Z \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} ۵!\times۴!
\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تعداد حالات}=۵!\times۴!\times۳$$

پس مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{۵!\times۶!\times\frac{۱}{۲}}{۵!\times۴!\times۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵

نکته (اصل جمع): اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به‌طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشــته باشـد، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد.

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحلـهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

نکته: در محاسبهٔ تعداد اعداد «زوج» یا «مضرب ۵» با ارقام متمایز، به کمک ارقامی که «صفر» نیز در آن‌ها وجود دارد، باید مســئله را بـه دو مرحله تقسیم و تعداد اعداد هر مرحله را جداگانه محاسبه کرده و در پایان، جواب‌های دو مرحله را با هم جمع کنیم:

مرحلهٔ اول: رقم «صفر» در یکان قرار داشته باشد.

مرحلهٔ دوم: رقم «صفر» در یکان قرار نداشته باشد.

با توجه به نکات، تعداد کل اعداد چهاررقمی زوج با ارقام ۰ تا ۶ را به‌دست آورده و آنگاه تعداد اعداد زوج چهاررقمی با ارقام متمـایز را از آن کم می‌کنیم.

تعداد کل اعداد زوج چهاررقمی با ارقام ۰ تا ۶ : $6 \times 7 \times 7 \times 4 = 1176$

۰ ۲ ۴ ۶

تعداد کل اعداد زوج چهاررقمی با ارقام ۰ تا ۶ و ارقام متمایز :

صفر در یکان باشد : $6 \times 5 \times 4 \times 1 = 120$

صفر

یا

صفر در یکان نباشد : $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

۲ ۴ ۶

$\Rightarrow 120 + 300 = 42$

و در نهایت، تعداد کل اعداد چهاررقمی زوج با ارقام ۰ تا ۶ که حداقل دو رقم آن‌ها یکسان باشند، برابر است با:

$1176 - 420 = 756$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶

نکته: می‌دانیم:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

با توجه به نکتهٔ بالا، داریم:

$$\binom{12}{2} + \binom{12}{3} = \binom{13}{3} \Rightarrow \binom{13}{3} + \binom{13}{4} = \binom{14}{4} \Rightarrow \binom{14}{4} + \binom{14}{5} = \binom{15}{5} \Rightarrow \binom{15}{5} + \binom{15}{6} = \binom{16}{6}$$

از طرفی $\binom{16}{7} = \binom{16}{9}$ **، بنابراین:**

$$\binom{16}{6} + \binom{16}{9} = \binom{16}{6} + \binom{16}{7} = \binom{17}{7}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷ نکته (اصل جمع): اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد؛ به‌طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m+n$ انتخاب وجود دارد.

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد؛ به‌طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هرکدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

با توجه به اینکه باید عدد موردنظر از ۷۶۴ کوچک‌تر باشد، ۳ حالت در نظر می‌گیریم:

الف) رقم صدگان ۷ و رقم دهگان ۶ باشد. در این صورت رقم یکان ۴ حالت دارد (صفر، ۱، ۲ یا ۳). پس تعداد اعداد موردنظر در این حالت برابر است با: $۱ \times ۱ \times ۴ = ۴$.

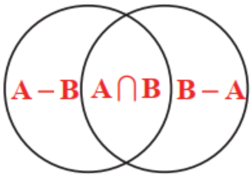
ب) رقم صدگان ۷ و رقم دهگان کوچک‌تر از ۶ باشد. در این صورت رقم دهگان ۶ حالت دارد (صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵) و رقم یکان ۸ حالت (غیرصدگان و دهگان) دارد. پس تعداد اعداد موردنظر در این حالت برابر است با: $۱ \times ۶ \times ۸ = ۴۸$.

پ) رقم صدگان ۷ نباشد. در این صورت رقم صدگان ۶ حالت (۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶)، رقم دهگان ۹ حالت (غیر صدگان) و رقم یکان ۸ حالت (غیرصدگان و دهگان) دارد. پس تعداد اعداد موردنظر در این حالت برابر است با: $۶ \times ۹ \times ۸ = ۴۳۲$.

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد کل اعداد موردنظر برابر است با: $۴ + ۴۸ + ۴۳۲ = ۴۸۴$.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸ اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش داشته باشیم و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.



اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ C باشند، به‌طوری که $A \cup B = C$، باید هر عضو C، مطابق نمودار ون زیر، عضو یکی از مجموعه‌های $A-B$، $B-A$ یا $A \cap B$ باشد، زیرا در غیر این صورت $A \cup B \neq C$ است.

پس برای هر عضو از مجموعهٔ C، سه انتخاب وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد کل حالات} = \underset{\text{عضو اول}}{۳} \times \underset{\text{عضو دوم}}{۳} \times \cdots \times \underset{\text{عضو ششم}}{۳} = ۳ \times ۳ \times ۳ \times \cdots \times ۳ = ۳^۶ = ۷۲۹$$

چون A و B ناتهی هستند، حالت $B = \varnothing$ و $A = C$ و حالت $B = C$ و $A = \varnothing$ از تعداد حالات به دست آمده کم می‌شوند؛ بنابراین ۷۲۷ روش برای انتخاب A و B وجود دارد.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹ **روش اول:** ابتدا جایگشت همهٔ حروف را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید به دلیل وجود ۲ حرف S، باید جواب را بر !۲ تقسیم کنیم: $\frac{۶!}{۲!}$

حالا برای جلوگیری از جایگشت حروف T,E,M,Y جواب را بر !۴ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\left(\frac{۶!}{۲!}\right)}{۴!} = \frac{۶!}{۲!۴!} = ۱۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰ بین حروف بی‌صدا جا باز می‌کنیم سپس دو حرف از سه حرف صدادار $\{U,I,O\}$ انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را در یک بسته قرار می‌دهیم. سپس ۲ جایگاه خالی از ۶ جایگاه موجود را انتخاب می کنیم و بسته و حرف صدادار تنها را در آنها قرار می‌دهیم:

_ F (UI) N _ C _ O _ T _ N _

جایگشت درون بسته — جایگشت بسته و حرف بیرونی

$$\Rightarrow \binom{6}{2}\times 3\times 2!\times 2!\times \frac{5!}{2!} = 15\times 3\times 2\times 120 = 10800$$

جایگشت بی صداها

یکی از حروف صدادار تنها باشد

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱ برای این که شـــامل ســـه حرف نقطه‌دار باشـــد، باید حرف "ی" در آخر کلمه نیاید. پس ابتدا تعداد کلمات ۶ حرفی که حرف آخر آنها ی است را پیدا می‌کنیم:

_ _ _ _ _ ی $\Rightarrow \frac{5!}{2!}$

ا و ی و ر و ا و ن — ثابت است

حال کل کلمات ۶ حرفی را منهای تعداد حالت‌هایی می‌کنیم که حرف "ی" در آخر کلمه است:

$$\frac{6!}{2!\,2!} - \frac{5!}{2!} = \frac{3}{2}\times 5! - \frac{1}{2}5! = 5! = 120$$

جایگشت دو حرف الف — جایگشت دو حرف ی

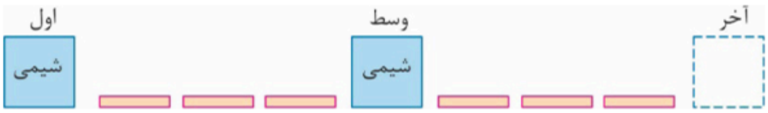
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲ اگر کتاب اول و وســـط ریاضی باشـــد، کتاب آخر باید یکی از ۴ کتاب زیســـت یا ۲ کتاب شیمی باشـــد، پس ۶ حالت دارد و بقیهٔ کتاب‌ها می‌توانند !۶ جایگشت کنند.

$\Rightarrow (3\times 2\times 6\times 6!)\times 2$

مشابه همین تحلیل، برای زیست و شیمی هم خواهیم داشت:

$\Rightarrow (4\times 3\times 5\times 6!)\times 2$



$\Rightarrow (2\times 1\times 7\times 6!)\times 2$

پس تعداد کل حالات برابر است با :

$$\Rightarrow (36\times 6! + 60\times 6! + 14\times 6!)\times 2 = 220\times 6!$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳ با توجّه به اطّلاعات مسأله داریم:

$abc = ۳۶$

$(۱,۲,۱۸) \to ۳! = ۶$ حالت   * $(۱,۱,۳۶) \to \binom{۳}{۱} = ۳$ حالت

$(۱,۴,۹) \to ۳! = ۶$ حالت $(۱,۳,۱۲) \to ۳! = ۶$ حالت

* $(۳,۳,۴) \to \binom{۳}{۱} = ۳$ حالت   * $(۲,۲,۹) \to \binom{۳}{۱} = ۳$ حالت

* $(۱,۶,۶) \to \binom{۳}{۱} = ۳$ حالت $(۲,۳,۶) \to ۳! = ۶$ حالت

برای سن این ۳ نفر ۳۶ حالت وجود دارد که در ۴ حالت آن (حالت های * دار) سن احسان و پارسا با هم برابر است. پس داریم:

$$P(A) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴

$$\left.\begin{array}{l} aaab \xrightarrow{\text{سه‌رقم‌یکسان}} \binom{۴}{۱} \times \underbrace{۶}_{aaa} \times \underbrace{۵}_{b} = ۱۲۰ \\ aabb \xrightarrow{\text{دو جفت‌یکسان}} \binom{۶}{۲} \times \frac{۴!}{۲!\,۲!} = ۱۵ \times ۶ = ۹۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۱۰$$

سه رقم مختلف ـ ۴ رقم مختلف ـ ۴ رقم یکسان ـ کل: راه دوم

$$= ۶^{۴} - ۶ - ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ - \binom{۴}{۲} \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۹۶ - ۶ - ۳۶۰ - ۷۲۰ = ۲۱۰$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۵ **پاسخ تشریحی** مسئله را به سه حالت تقسیم می‌کنیم تا قابل حل شود.

گام اول: حالت اول: یک تهرانی و یک اصفهانی و یک نفر از ۴ شهر دیگر انتخاب شوند. تعداد حالت‌های انتخاب نفر تهرانی $\binom{۴}{۱}$ و نفر اصفهانی $\binom{۴}{۱}$ است؛ سپس باید یک شهر از ۴ شهر دیگر انتخاب کنیم که به $\binom{۴}{۱}$ حالت ممکن است و از آن شهر یک نفر از سه نفر را انتخاب کنیم که آن هم به $\binom{۳}{۱}$ حالت ممکن است؛ پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب نفر تهرانی}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب نفر اصفهانی}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک شهر دیگر}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب نفر آن شهر}} = ۴\times۴\times۴\times۳ = ۱۹۲$$

گام دوم: حالت دوم: یک تهرانی یا یک اصفهانی و دو نفر از ۴ شهر دیگر انتخاب شوند. ابتدا باید بین دو شهر تهران و اصفهان، یک شهر را انتخاب کنیم که تعداد حالت‌های آن $\binom{۲}{۱}$ است؛ سپس از شهر انتخاب‌شده یک نفر را انتخاب کنیم که به $\binom{۴}{۱}$ حالت ممکن است. در ادامه باید ۲ شهر از ۴ شهر باقی‌مانده انتخاب کنیم که به $\binom{۴}{۲}$ حالت ممکن است و از هر شهر انتخاب‌شده، یک نفر از سه نفر را انتخاب کنیم که به $\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}$ حالت ممکن است (دوتا $\binom{۳}{۱}$ حالت). طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب بین تهران یا اصفهان}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر از ۴ نفر (تهران یا اصفهان)}} \times \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب دو شهر از چهار شهر دیگر}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر از ۳ نفر شهر انتخابی}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر از ۳ نفر شهر انتخابی}} = ۲\times۴\times(\frac{۴\times۳}{۲})\times۳\times۳ = ۴۳۲$$

گام سوم: حالت سوم: هر سه نفر از ۴ شهر دیگر (غیر از تهران و اصفهان) انتخاب شوند. در این حالت کافی است ابتدا سه شهر از چهار شهر انتخاب شوند که به $\binom{۴}{۳}$ حالت ممکن است؛ سپس از هر شهر انتخاب‌شده یک نفر از سه نفر انتخاب شود که $\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}$ حالت ممکن (سه‌تا $\binom{۳}{۱}$ حالت). طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ شهر از ۴ شهر دیگر}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر از ۳ نفر شهر انتخابی}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر از ۳ نفر شهر انتخابی}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر از ۳ نفر شهر انتخابی}} = ۴\times۳\times۳\times۳ = ۱۰۸$$

گام چهارم: طبق اصل جمع، تعداد حالت‌های ۱ تا ۳ را جمع می‌کنیم تا تعداد کل حالت‌ها به دست آید.

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = ۱۹۲ + ۴۳۲ + ۱۰۸ = ۷۳۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶ تعداد ایرانی‌ها، ۲، ۳، ۴ و یا ۵ می‌باشد.

$$\text{۲ ایرانی} \Rightarrow \binom{۵}{۲}\Big[\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{\text{۴ نفر آلمانی یا ژاپنی}}-\underbrace{\binom{۴}{۴}}_{\text{هر ۴ نفر آلمانی باشند}}\Big]=۱۰(۳۵-۱)=۳۴۰$$

$$\text{۳ ایرانی} \Rightarrow \binom{۵}{۳}\binom{۷}{۳}=۳۵۰$$

$$\text{۴ ایرانی} \Rightarrow \binom{۵}{۴}\binom{۷}{۲}=۱۰۵$$

$$\text{۵ ایرانی} \Rightarrow \binom{۵}{۵}\binom{۷}{۱}=۷$$

خواهیم داشت:
$$۳۴۰+۳۵۰+۱۰۵+۷=۸۰۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۷

$$\frac{\underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{انتخاب یک جفت کفش}}\overbrace{\left[\binom{۱۲}{۲}-\binom{۶}{۱}\right]}^{\text{انتخاب ۲ لنگه کفش از ۱۲ لنگهٔ باقی‌ماندهٔ منهای حالاتی که دو لنگه یک جفت کفش باشند.}}}{\underbrace{\binom{۱۴}{۴}}_{\text{انتخاب ۴ لنگه کفش}}}=\frac{۷\times(۶۶-۶)}{\frac{\cancel{۱۴}^{۷}\times ۱۳\times \cancel{۱۲}\times ۱۱}{\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times ۱}}=\frac{۷\times ۶۰}{۷\times ۱۳\times ۱۱}=\frac{۶۰}{۱۴۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸ اگر متین از مسیر گرگان به مشهد سفر کند، قطعاً باید از مسیر شاهرود باز گردد. زیرا بین گرگان و مشهد یک جاده وجود دارد و هیچ‌یک از جاده‌های مسیر برگشت نباید با مسیر رفت یکی باشد، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}۳=۳\times۱=\text{حالت‌های مسیر رفت از طریق گرگان}\\ ۶=۳\times۲=\text{حالت‌های مسیر برگشت از طریق شاهرود}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تعداد حالات رفت و برگشت}=۳\times۶=۱۸\quad(۱)$$

اما اگر متین از مسیر شاهرود به مشهد سفر کند، ممکن است از گرگان یا شاهرود بازگردد.

$$\text{حالت‌های مسیر رفت از طریق شاهرود}=۲\times۳=۶ \;\left\langle\begin{array}{l}۲=۲\times۱=\text{حالت‌های مسیر برگشت از طریق شاهرود}\\ ۳=۱\times۳=\text{حالت‌های مسیر برگشت از طریق گرگان}\end{array}\right\}\Rightarrow ۲+۳=۵$$

$$(۲)\quad ۳۰=۶\times۵=\text{تعداد حالات رفت و برگشت}$$ (وقتی از مسیر شاهرود سفر کند.)

$$(۱),(۲)\Rightarrow \text{تعداد کل حالات رفت و برگشت}=۱۸+۳۰=۴۸$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۹ تمامی اعداد یک رقمی قابل قبول هستند که تعداد آن‌ها ۹ می‌باشد.

اعداد طبیعی دو رقمی که رقم تکراری ندارند، برابر است با: $\underline{9}\times\underline{9}=81$

حال تعداد اعداد سه رقمی را که کوچکتر از ۵۳۶ بوده و رقم تکراری ندارند، محاسبه می‌کنیم:

صدگان:
- کوچکتر از ۵ باشد $\rightarrow \underset{1,2,3,4}{\underline{4}}\times\underline{9}\times\underline{8}=288$
- برابر ۵ باشد:
  - دهگان برابر ۳ باشد $\rightarrow \underset{5}{\underline{1}}\times\underset{3}{\underline{1}}\times\underset{0,1,2,4}{\underline{4}}=4$
  - دهگان کوچکتر از ۳ باشد $\rightarrow \underset{5}{\underline{1}}\times\underset{0,1,2}{\underline{3}}\times\underline{8}=24$

$\xrightarrow{+} 316$

$=9+81+316=406$ پاسخ مسأله

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۰ حالت اول: $a<b<c$: با اعداد $\{0,1,2,\ldots,9\}$ می‌خواهیم این عدد ۳ رقمی را بسازیم. کافی است ۳ عدد را از بین ۹ عدد انتخاب کنیم (صفر نمی‌تواند انتخاب شود).

(این ۳ عدد به ۱ حالت در شرط $a<b<c$ قرار می‌گیرند.) $\binom{9}{3}$

حالت دوم: $a<b=c$: کافی است دو عدد از بین اعداد $1,2,3,\ldots,9$ انتخاب کنیم: $\binom{9}{2}$

کل حالات: $\binom{9}{3}+\binom{9}{2}=\frac{9!}{6!\times 3!}+\frac{9!}{2!\times 7!}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}+\frac{9\times 8}{2}$

$=84+36=120$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۱

در عدد چهار رقمی هزارگان ۳ باشد: $\frac{1}{\text{فقط۳}}\times\frac{1}{\text{فقط۵}}\times\frac{2}{\text{۲یا۴}}\times\frac{1}{\text{فقط۱}}\Rightarrow 2$

در عدد چهار رقمی هزارگان ۴ باشد: $\frac{1}{\text{فقط۴}}\times 3\times 2\times\frac{3}{\text{فرد}}\Rightarrow 18$

در عدد چهار رقمی هزارگان ۵ باشد: $\frac{1}{\text{فقط۵}}\times 3\times 2\times\frac{2}{\text{فرد۱یا۳}}\Rightarrow 12$

عدد پنج رقمی باشد: $4\times 3\times 2\times 1\times\frac{3}{\text{فرد}}\Rightarrow 72$

روی هم ۱۰۴ تا عدد می‌توان ساخت.

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۲ **نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به‌طوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای انجام هرکدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، کل کار موردنظر را می‌توان به $m\times n$ روش انجام داد.**

اعدادی را می‌خواهیم که بزرگ‌ترین رقم آن‌ها ۴ است، پس عدد موردنظر اعداد $5,6,7,8,9$ را ندارد. می‌خواهیم با ارقام $\{0,1,2,3,4\}$ عددی ۳ رقمی بسازیم که ۴ را دارد، بهتر است تعداد کل اعداد ۳ رقمی ساخته‌شده با ارقام $\{0,1,2,3\}$ را از تعداد اعداد سه‌رقمی ساخته‌شده با ارقام $\{0,1,2,3,4\}$ کم کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\{0,1,2,3,4\}\ \text{کل اعداد ۳رقمی با ارقام}: 4\times 5\times 5=100\\[2ex] \{0,1,2,3\}\ \text{کل اعداد ۳رقمی بدون ۴ با ارقام}: 3\times 4\times 4=48\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تعداد اعداد ۳رقمی که بزرگ‌ترین رقم آن‌ها ۴ است}=100-48=52$$

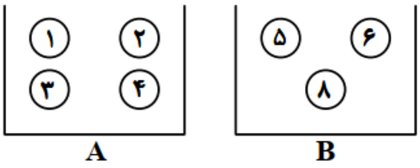
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۳

نکته (اصل جمع): اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد؛ به‌طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m+n$ انتخاب وجود دارد.

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد؛ به‌طوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هرکدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

دو جعبه را A و B می‌نامیم. برای تشکیل عدد دورقمی دو حالت وجود دارد:



حالت اول: عدد جعبهٔ A را یکان و عدد جعبهٔ B را دهگان در نظر بگیریم. در این صورت تعداد حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با:

دهگان	یکان
۵ یا ۶ یا ۸	۲ یا ۴

$\Rightarrow 3 \times 2 = 6$

حالت دوم: عدد جعبهٔ A را دهگان و عدد جعبهٔ B را یکان در نظر بگیریم. در این صورت تعداد حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با:

دهگان	یکان
۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴	۶ یا ۸

$\Rightarrow 4 \times 2 = 8$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها طبق اصل جمع برابر است با: $6 + 8 = 14$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۴

در حالت‌هایی که ترتیب خاصی برای r شیء از n شیء متمایز داریم می‌توانیم از فرمول $\frac{n!}{r!}$ استفاده کنیم:

گزینه ۱: حسن قبل از جواد باشد: جایگشت ۶ نفر برابر $6!$ است که در نصف حالت‌ها، حسن قبل از جواد و در نصف دیگر جواد قبل از حسن قرار می‌گیرد.

$$r = 2 \rightarrow \frac{6!}{2!} = 360$$

گزینه ۲:

$$r = 3 \rightarrow \frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

گزینه ۳:

$$\underline{5}\ \underline{4}\ \underbrace{\underline{\quad 1 \quad}}_{\text{علی}}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} \qquad 1 \times 5! = 120$$

گزینه ۴:

$$\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underbrace{\underline{\qquad 5 \qquad}}_{\text{هر کس جز حسن}} \qquad 5! \times 5 = 600$$

بنابراین در گزینه ۴ تعداد حالت‌ها بیشتر است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۵

پاسخ تشریحی **گام اول**: تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی برابر $\binom{n}{3}$ است و تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی که شامل ۱ و فاقد ۲ باشند، از رابطهٔ $\binom{n-2}{2}=\binom{n-(1+1)}{3-1}$ به دست می‌آید.

گام دوم: طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{1}{4}\binom{n}{3}=\binom{n-2}{2}$$

و به صورت زیر این معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{4}\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{(n-2)(n-3)}{2} \Rightarrow n(n-1)=12(n-3)$$

می‌توانیم از خود گزینه‌ها استفاده کنیم و با امتحان‌کردن مقادیر مختلف n، درستی رابطهٔ بالا را جست‌وجو کنیم.

$$n=6: 6\times 5\neq 12\times 3$$

$$\vdots$$

$$n=9: 9\times 8=12\times 6$$

از طریق حل معادله هم می‌توان مقدار n را به دست آورد:

$$\Rightarrow n^2-n=12n-36 \Rightarrow n^2-13n+36=(n-4)(n-9)=0 \Rightarrow n=4 \text{ یا } 9$$

هر دوتا مقدار n هم قابل قبول هستند.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۲۶

ابتدا تعداد اعضای مجموعه **A** یعنی **n** را می‌یابیم.

$$C(3n,2)-8C(n,n-2)=42 \rightarrow \frac{(3n)!}{(3n-2)!2!}-\frac{8n!}{(n-n+2)!(n-2)!}=42 \rightarrow \frac{(3n)(3n-1)(3n-2)!}{(3n-2)!\times 2}-\frac{8n(n-1)(n-2)!}{2\times(n-2)!}=42$$

$$\rightarrow 9n^2-3n-8n^2+8n=84 \rightarrow n^2+5n-84=0 \rightarrow n=7 \text{ (ق ق)}$$

پس مجموعه **A** دارای ۷ عضو است که تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی **A** که فاقد یک عضو معین و مشخص می‌باشد برابر است با:

$$\binom{7-1}{4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\times 2!}=15$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۷

یک رقمی: ۳،۹

دورقمی: $\frac{1}{\text{فقط}5}\times\frac{3}{\text{1 یا 4 یا 7}}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{\text{3 یا 6}}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{\text{6 یا 9}}+\frac{2}{\text{1 یا 7}}\times\frac{3}{\text{2 یا 5 یا 8}}=13$

سه‌رقمی:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\text{فقط}3}\times\frac{3}{\text{2 یا 5 یا 8}}\times\frac{1}{-}\\ \frac{1}{\text{فقط}5}\times\frac{3}{\text{3 یا 6 یا 9}}\times\frac{1}{-}\\ \frac{1}{\text{فقط}7}\times\frac{2}{\text{فقط}4}\times\frac{1}{-}\\ \frac{1}{\text{فقط}9}\times\frac{3}{\text{2 یا 5 یا 8}}\times\frac{1}{-}\end{array}\right\}+\Rightarrow 10$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۸

A,B		C,D		بقیه		
$\binom{۲}{۱}$	$\times$	$\binom{۲}{۰}$	$\times$	$\binom{۴}{۳}$	$=$	۸
$\binom{۲}{۱}$	$\times$	$\binom{۲}{۱}$	$\times$	$\binom{۴}{۲}$	$=$	۲۴
$\binom{۲}{۲}$	$\times$	$\binom{۲}{۰}$	$\times$	$\binom{۴}{۲}$	$=$	۶
$\binom{۲}{۲}$	$\times$	$\binom{۲}{۱}$	$\times$	$\binom{۴}{۱}$	$=$	۸
						۴۶

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۹

نکته (جایگشت): هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت nتایی از آن اشیاء می‌گوییم و برابر است با: $n!$

نکته (تبدیل r شیء از میان n شیء): تعداد حالت‌های انتخاب و چینش r شیء از میان n شیء متمایز (ترتیب اشیاء مهم است و با جابه‌جایی هریک، حالت جدیدی به وجود می‌آید) برابر است با:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

وقتی قرار است هیچ دو مردی کنار هم قرار نگیرند، ابتدا خانم‌ها را در صف قرار می‌دهیم که به !۵ حالت ممکن است. حال از بین ۶ مکان ممکن، ۴ مکان برای مردها وجود دارد.

(دایره‌ها مکان‌های ممکن برای مردان است. ○ Z ○ Z ○ Z ○ Z ○ Z ○)

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۵!P(۶,۴)=۵!\times\frac{۶!}{۲!}=۵!۶!\times\frac{۱}{۲}$$

اما در حالتی که مردان یک‌درمیان باشند، ابتدا خانم‌ها را به !۵ حالت قرار می‌دهیم. ۳ حالت برای یک‌درمیان بودن مردان داریم:

$$\left.\begin{array}{l}
Z\ M\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ M\ Z \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} ۵!\times ۴! \\
Z\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ M \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} ۵!\times ۴! \\
M\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ M\ Z\ Z \xrightarrow{\text{تعداد حالات}} ۵!\times ۴!
\end{array}\right\} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = ۵!\times ۴!\times ۳$$

پس مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{۵!\times ۶!\times\frac{۱}{۲}}{۵!\times ۴!\times ۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۰ نکته (اصل جمع): اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به‌طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد.

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

نکته: در محاسبهٔ تعداد اعداد «زوج» یا «مضرب ۵» با ارقام متمایز، به کمک ارقامی که «صفر» نیز در آن‌ها وجود دارد، باید مسئله را به دو مرحله تقسیم و تعداد اعداد هر مرحله را جداگانه محاسبه کرده و در پایان، جواب‌های دو مرحله را با هم جمع کنیم:

مرحلهٔ اول: رقم «صفر» در یکان قرار داشته باشد.

مرحلهٔ دوم: رقم «صفر» در یکان قرار نداشته باشد.

با توجه به نکات، تعداد کل اعداد چهاررقمی زوج با ارقام ۰ تا ۶ را به‌دست آورده و آنگاه تعداد اعداد زوج چهاررقمی با ارقام متمایز را از آن کم می‌کنیم.

تعداد کل اعداد زوج چهاررقمی با ارقام ۰ تا ۶ : $۶ \times ۷ \times ۷ \times ۴ = ۱۱۷۶$ (۰، ۲، ۴، ۶)

تعداد کل اعداد زوج چهاررقمی با ارقام ۰ تا ۶ و ارقام متمایز :

صفر در یکان باشد: $۶ \times ۵ \times ۴ \times ۱ = ۱۲۰$ (صفر)

یا

صفر در یکان نباشد: $۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۰۰$ (۲، ۴، ۶)

$\Rightarrow ۱۲۰ + ۳۰۰ = ۴۲۰$

و در نهایت، تعداد کل اعداد چهاررقمی زوج با ارقام ۰ تا ۶ که حداقل دو رقم آن‌ها یکسان باشند، برابر است با: $۱۱۷۶ - ۴۲۰ = ۷۵۶$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۱ ارقام ۱ تا ۹ شامل ۵ رقم فرد و ۴ رقم زوج است. برای آنکه در عدد ۹ رقمی حاصل هیچ دو رقم زوجی کنار هم نباشند، ابتدا ارقام فرد را کنار هم قرار می‌دهیم. این کار به $۵!$ حالت قابل انجام است.

○ فرد ○ فرد ○ فرد ○ فرد ○ فرد ○

بین و دو طرف این ۵ رقم فرد، شش مکان (○) به‌وجود می‌آید. اگر ارقام زوج در این مکان‌ها قرار بگیرند، امکان ندارد کنار هم قرار بگیرند. تعداد حالات قرار گرفتن ۴ رقم زوج در این شش مکان، برابر است با:

$$\binom{۶}{۴} \times ۴!$$

بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$۵! \times \binom{۶}{۴} \times ۴! = ۱۲۰ \times ۱۵ \times ۲۴ = ۱۲۰ \times ۳۶۰ = ۴۳۲۰۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۲

نکتهٔ ۱: جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ می‌باشد و جایگشت r شیء از n شیء $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ می‌باشد.

نکتهٔ ۲: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیتی نداشته باشد یک ترکیب rتایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم: $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ ، $0\le r\le n$

برای حل سؤال چون تعداد مهندس‌ها ۴ نفر از دکترها کمتر است پس از جایگشت یکی‌درمیان نمی‌شود استفاده کرد و باید فکر دیگری کرد. برای این کار ابتدا دکترها را مرتب می‌کنیم که این کار به $۷!$ انجام می‌شود؛ اکنون جای مهندس‌ها را در میان دکترها مشخص می‌کنیم که با توجه به شکل مهندس‌ها در ۸ مکان می‌توانند قرار گیرند.

$$\bigcirc\, D_1 \bigcirc\, D_2 \bigcirc\, D_3 \bigcirc\, D_4 \bigcirc\, D_5 \bigcirc\, D_6 \bigcirc\, D_7 \bigcirc$$

پس ۳ مکان از این ۸ مکان را برای مهندس‌ها انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$\binom{8}{3}\times 3!=P(8,3)$$

بنابراین این صف ۱۰ نفره به $۷!\,P(8,3)$ روش تشکیل می‌شود.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۳

گام اول: برای محاسبهٔ تعداد کل عضوهای فضای نمونه باید تعداد کلیهٔ جایگشت‌های نُه‌تایی کلمهٔ نُه‌حرفی alchymies را بنویسیم، پس:

$$n(S)=P(9,9)=9!$$

گام دوم: حالا تعداد حالت‌های مطلوب که قرارگرفتن فقط یک حرف بین حروف a و h و همچنین بین حروف e و i است را در دو حالت به صورت زیر می‌نویسیم:

حالت اول: وضعیتی را در نظر می‌گیریم که بین حروف a و h، حروفی به غیر از e و i قرار بگیرد یا می‌توان گفت بین حروف e و i، حروفی به غیر از a و h قرار بگیرد؛ یعنی:

$$a,\_\_,h\;,\;e,\_\_,i\;,\;\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc$$

تعداد جایگشت‌ها در این حالت، به این صورت است که پنج دستهٔ بالا دارای $5!$ جایگشت می‌باشند. در دستهٔ $a,\_\_,h$ بین a و h، جایگشتی برابر $2!$ وجود دارد؛ همچنین در دستهٔ $e,\_\_,i$ بین e و i نیز جایگشتی برابر $2!$ وجود دارد. به علاوه پس از مشخص‌شدن جایگاه e,i,h,a، در جایگاه بین آن‌ها یکی از ۵ حرف باقی‌مانده می‌تواند قرار بگیرد و پس از قرارگیری یک حرف در بین e و i یا h و a، چهار حرف باقی‌مانده می‌توانند در جاهای خالی قرار بگیرند؛ بنابراین تعداد جایگشت‌ها در حالت مطلوب اول به صورت $4\times5\times2!\times2!\times5!$ خواهد بود.

در حالت دوم تعداد جایگشت‌ها به این صورت است که یکی از حروف e یا i در بین دو حرف a و h قرار بگیرد یا یکی از حروف a یا h در بین دو حرف e و i قرار بگیرد؛ یعنی:

$$a,e,h,i\;,\;\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc$$

$$e,a,i,h\;,\;\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc$$

در هر یک از این وضعیت‌ها، $2!$ جایگشت برای a، h و $2!$ جایگشت برای i و e وجود دارد؛ همچنین $6!$ جایگشت برای ۶ دستهٔ ایجادشده وجود دارد و چون دو وضعیت در این حالت رخ می‌دهد تعداد به‌دست‌آمده در ۲ ضرب می‌شود؛ یعنی تعداد حالت‌های مطلوب در حالت دوم $2\times6!\times2!\times2!$ می‌باشد.

گام سوم: بنابراین تعداد کل حالات مطلوب برابر است با جمع دو مقدار به‌دست‌آمده از حالت اول و دوم؛ پس:

$$n(A)=5!\times2!\times2!\times5\times4+2!\times2!\times6!\times2=5!\times80+5!\times48=5!\times128$$

گام چهارم: حال احتمال مورد نظر را به صورت مقابل محاسبه می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5!\times128}{9!}=\frac{5!\times128}{9\times8\times7\times6\times5!}=\frac{8}{189}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۴

گام اول: ابتدا تعداد عضوهای فضای نمونه را با انتخاب ۳ کارت از بین ۶ کارت موجود به صورت ترکیب ۳ از ۶ می‌نویسیم، یعنی:

$$n(S)=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times ۵\times ۴}{۶}=۲۰$$

گام دوم: برای به دست آوردن تعداد عضوهای پیشامد مطلوب، یعنی ساختن عدد سه‌رقمی مضرب ۵، با توجه به اعداد موجود، یکان عدد مورد نظر فقط می‌تواند ۵ باشد و از طرفی چون ارقام به شکل صعودی باید در کنار هم باشند، بنابراین دو رقم دهگان و صدگان باید از بین اعداد ۴، ۳، ۲، ۱ انتخاب شود، پس:

$$\_,\_,\underline{۵}\ \Rightarrow\ n(A)=\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$$

گام سوم: حالا از تقسیم تعداد حالات مطلوب به تعداد کل حالات، احتمال مورد نظر را به دست می‌آوریم:

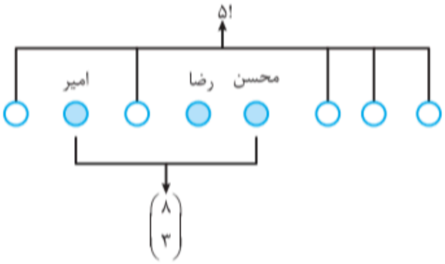
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

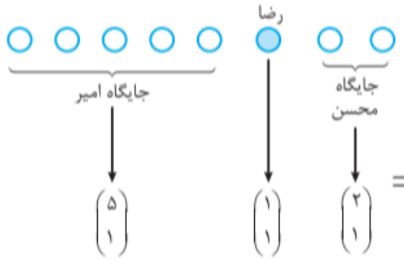
۳۵

گام اول: ابتدا برای به دست آوردن فضای نمونه، باید سه جایگاه برای رضا، محسن و امیر از بین سه جایگاه موجود انتخاب کنیم و همین‌طور جایگشت ۵ نفر دیگر را در نظر بگیریم؛ پس:

$$n(S)=\binom{۸}{۳}\times ۵!$$



گام دوم: حالا پیشامد مطلوب آن است که رضا از نظر سن در رتبهٔ سوم قرار بگیرد، بنابراین محسن می‌تواند جایگاه اول یا دوم را داشته باشد و امیر می‌تواند جایگاه چهارم، پنجم، ششم، هفتم یا هشتم را داشته باشد، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: (دقت کنید که در این حالت نیز باید جایگشت پنج نفر دیگر را لحاظ کرد)



$$\Rightarrow\ n(A)=\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}\times ۵!$$

گام سوم: بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}\times ۵!}{\binom{۸}{۳}\times ۵!}=\frac{۲\times ۵}{\frac{۸\times ۷\times ۶}{۶}}=\frac{۲\times ۵}{۸\times ۷}=\frac{۵}{۲۸}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۶ با اعداد طبیعی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$، تعداد اعداد طبیعی یک‌رقمی، دورقمی، سه‌رقمی و چهاررقمی ممکن که کوچک‌تر از ۳۰۰۰ باشند را محاسبه می‌کنیم.

گام اول: اعداد یک‌رقمی طبیعی زوج کوچک‌تر از ۳۰۰۰ شامل ۳ عدد $\{۲,۴,۶\}$ است.

گام دوم: اعداد دورقمی طبیعی زوج کوچک‌تر از ۳۰۰۰ شامل ۱۸ عدد است که مطابق اصل ضرب در جایگاه یکان، ۳ عدد $\{۲,۴,۶\}$ می‌توانند قرار بگیرند و در جایگاه دهگان از بین اعداد طبیعی $\{۱,۲,\dots,۷\}$، به غیر از یکی از اعداد زوج، ۶ عدد دیگر را می‌توان قرار داد.

$$\underset{\text{دهگان}}{\underset{\downarrow}{۶}} \times \underset{\text{یکان}}{\underset{\downarrow}{۳}} = ۱۸$$

گام سوم: اعداد سه‌رقمی طبیعی زوج کوچک‌تر از ۳۰۰۰ شامل ۹۰ عدد است که مطابق اصل ضرب در جایگاه یکان، ۳ عدد $\{۲,۴,۶\}$ می‌توانند قرار بگیرند و در جایگاه دهگان و صدگان نیز تعداد اعدادی که می‌توان قرار داد، به صورت مقابل است.

$$\underset{\text{صدگان}}{\underset{\downarrow}{۶}} \times \underset{\text{دهگان}}{\underset{\downarrow}{۵}} \times \underset{\text{یکان}}{\underset{\downarrow}{۳}} = ۹۰$$

گام چهارم: اعداد چهاررقمی طبیعی زوج کم‌تر از ۳۰۰۰ شامل ۱۰۰ عدد است که مطابق اصل ضرب به دو صورت زیر محاسبه می‌شوند که در جایگاه هزارگان فقط می‌توان ۱ یا ۲ را قرار داد.

اگر در جایگاه هزارگان عدد ۱ را قرار دهیم، در جایگاه یکان سه انتخاب $\{۲,۴,۶\}$ خواهیم داشت، پس طبق اصل ضرب تعداد اعداد چهاررقمی در این حالت برابر است با:

$$\underset{\text{جایگاه فقط ۱}}{\underset{\downarrow}{۱}} \times ۵ \times ۴ \times \underset{\text{جایگاه ۲ یا ۴ یا ۶}}{\underset{\downarrow}{۳}} = ۶۰$$

اگر در جایگاه هزارگان عدد ۲ را قرار دهیم، در جایگاه یکان دو انتخاب $\{۴,۶\}$ خواهیم داشت، پس طبق اصل ضرب تعداد اعداد چهاررقمی در این حالت برابر است با:

$$\underset{\text{جایگاه فقط ۲}}{\underset{\downarrow}{۱}} \times ۵ \times ۴ \times \underset{\text{جایگاه ۴ یا ۶}}{\underset{\downarrow}{۲}} = ۴۰$$

گام پنجم: بنابراین در کل ۱۰۰ عدد چهاررقمی با شرایط مسئله می‌توان نوشت و در نهایت تعداد کل اعداد زوج کم‌تر از ۳۰۰۰ که با ارقام $\{۱,۲,\dots,۷\}$ می‌توان نوشت برابر است با:

$$۳+۱۸+۹۰+۱۰۰=۲۱۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۷ **گام اول**: برای این‌که از هر زوج، دقیقاً یک نفر در بین ۵ نفر انتخابی باشند، باید ابتدا از هر زوج یک نفر را انتخاب کنیم، یعنی $\binom{۲}{۱}$ برای زوج اول و $\binom{۲}{۱}$ برای زوج دوم.

گام دوم: سپس از بین ۴ نفر باقی‌مانده، ۳ نفر دیگر را انتخاب می‌کنیم؛ یعنی $\binom{۴}{۳}$، تا یک گروه پنج‌نفری که از هر زوج دقیقاً یک نفر در آن‌ها هست ایجاد شود.

گام سوم: بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۴}{۳}=۲\times۲\times۴=۱۶$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۸

نکته اگر بخواهیم تعداد جایگشت‌های n رقم یا حرف را بنویسیم که در آن‌ها یکی از ارقام یا حروف k بار تکرار شده باشد باید ابتدا تعداد جایگشت‌های آن ارقام را بنویسیم، سپس جواب را به $k!$ تقسیم کنیم؛ مثلاً اگر بخواهیم با حروف a,b,b، کلمات سه‌حرفی بنویسیم باید تعداد جایگشت‌های آن یعنی $3!$ را به تعداد حرف تکراری فاکتوریل یعنی $2!$ تقسیم کنیم؛ یعنی: $\frac{3!}{2!}=3$

گام اول: برای حل ابتدا باید تعداد حالت‌های ممکن چهارحرفی را از بین ۶ حرف موجود انتخاب کنیم که در این صورت ۵ حالت برای آن‌ها امکان‌پذیر است که عبارت‌اند از:

حالت اول: A,A,A,B حالت دوم: A,A,A,C

حالت سوم: A,A,B,B حالت چهارم: A,A,B,C

حالت پنجم: A,B,B,C

گام دوم: حالا تعداد تبدیلات یا جایگشت‌های چهارحرفی هر یک از حالات بالا را که برابر $4!$ است می‌نویسیم و به تعداد حرف تکرار فاکتوریل تقسیم می‌کنیم، یعنی:

تعداد تبدیلات حالت اول برابر است با: $\frac{4!}{3!}=4$

تعداد تبدیلات حالت دوم برابر است با: $\frac{4!}{3!}=4$

تعداد تبدیلات حالت سوم برابر است با: $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

تعداد تبدیلات حالت چهارم برابر است با: $\frac{4!}{2!}=12$

تعداد تبدیلات حالت پنجم برابر است با: $\frac{4!}{2!}=12$

گام سوم: بنابراین تعداد کل تبدیلات چهارحرفی برابر است با: $4+4+6+12+12=38$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۹

گام اول: عدد مورد نظر باید هم به ۵ و هم به ۳ بخش‌پذیر باشد تا مضرب ۱۵ شود؛ بنابراین ابتدا فرض می‌کنیم عدد ده‌رقمی مورد نظر به صورت $5abcddcba5$ باشد که هم از دو طرف یکسان خوانده شود و هم دارای یکان ۵ باشد تا بر ۵ بخش‌پذیر باشد. از طرفی برای این که به ۳ بخش‌پذیر باشد باید مجموع ارقام آن مضرب ۳ باشد، پس:

$$\text{مجموع ارقام عدد ده‌رقمی}=10+2a+2b+2c+2d=3k \Rightarrow 2(5+a+b+c+d)=3k$$

گام دوم: از تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت که $5+a+b+c+d$ نیز باید مضرب ۳ باشد. اگر $a=b=c=d=7$ باشد، حداکثر عبارت $a+b+c+d=28$ و اگر $a=b=c=d=5$ باشد حداقل عبارت $a+b+c+d=20$ است، پس: $20\le a+b+c+d\le 28$ است.

بنابراین برای این‌که حاصل $5+a+b+c+d$ بر سه بخش‌پذیر باشد، حاصل $a+b+c+d$، فقط می‌تواند مقادیر ۲۲ و ۲۸ را بپذیرد؛ یعنی:

$$\overbrace{a+b+c+d}^{22}+5=27=3k' \Rightarrow a+b+c+d=22$$

$$\underbrace{a+b+c+d}_{28}+5=33=3k' \Rightarrow a+b+c+d=28$$

گام سوم: در حالتی که $a+b+c+d=22$ باشد باید مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$ شامل ۳ عدد ۵ و یک عدد ۷ باشد؛ یعنی $\{5,5,5,7\}$، اما در حالتی که $a+b+c+d=28$ باشد مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$ باید شامل ۴ عدد ۷ باشد؛ یعنی $\{7,7,7,7\}$.

گام چهارم: بنابراین برای نوشتن عدد ده‌رقمی مورد نظر باید از مجموعهٔ $\{a,b,c,d\}$ یک رقم ۷ و یا ۴ رقم ۷ انتخاب کرد، پس تعداد ارقام مورد نظر برابر است با: $\binom{4}{1}+\binom{4}{4}=4+1=5$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰ **گام اول:** ابتدا عدد هشت‌رقمی مورد نظر را که باید با ارقام $\{۱,۲,۳,\dots,۸\}$ نوشته شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\underset{a}{\_\_},\underset{b}{\_\_},\underset{c}{\_\_},\underset{d}{\_\_},\underset{e}{\_\_},\underset{f}{\_\_},\underset{g}{\_\_},\underset{h}{\_\_}$

گام دوم: از آن‌جایی که برای ارقامی که در جایگاه‌های a و e و f قرار می‌گیرند شرطی وجود ندارد، پس می‌توانیم از ۸ عدد طبیعی موجود، ۳ عدد را انتخاب کنیم و جایگشت‌های آن‌ها را محاسبه کنیم؛ یعنی $\binom{۸}{۳}\times ۳!$.

$\underset{a}{\checkmark},\_\_,\_\_,\_\_,\underset{e}{\checkmark},\underset{f}{\checkmark},\_\_,\_\_$

$\binom{۸}{۳}\times ۳!$

گام سوم: با توجه به شرایط $b<c<d$ و $b<g<h$، b باید در بین ارقام مانده، کوچک‌ترین رقم باشد، پس از بین ۵ رقم مانده، کوچک‌ترین را انتخاب کرده و در جایگاه b قرار می‌دهیم، پس در این حالت فقط یک انتخاب وجود دارد.

$\underset{a}{\checkmark},\underset{b}{\text{کوچک‌ترین رقم مانده}},\_\_,\_\_,\underset{e}{\checkmark},\underset{f}{\checkmark},\_\_,\_\_$

برای انتخاب کوچک‌ترین رقم‌مانده ۱ حالت وجود دارد.

گام چهارم: حال برای برقراری شرط $c<d$، از بین ۴ رقم مانده، دوتا را انتخاب می‌کنیم؛ یعنی $\binom{۴}{۲}$ و در یک حالت به طوری که c کوچک‌تر از d باشد در جایگاهشان قرار می‌دهیم.

$\underset{a}{\checkmark},\underset{b}{\text{کوچک‌ترین رقم‌مانده}},\underset{c}{\_\_},\underset{d}{\_\_},\underset{e}{\checkmark},\underset{f}{\checkmark},\_\_,\_\_$

c<d

گام پنجم: در انتها برای برقراری شرط $g<h$، از بین ۲ رقم مانده، آن‌ها را انتخاب می‌کنیم، یعنی $\binom{۲}{۲}$ و در یک حالت به طوری که g کوچک‌تر از h باشد در جایگاهشان قرار می‌دهیم.

$\underset{a}{\checkmark},\underset{b}{\text{کوچک‌ترین رقم‌مانده}},\underset{c}{\_\_},\underset{d}{\_\_},\underset{e}{\checkmark},\underset{f}{\checkmark},\underset{g}{\_\_},\underset{h}{\_\_}$

c<d　　g<h

گام ششم: بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد کل اعداد هشت‌رقمی که با شرایط مسئله می‌توان نوشت برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۸}{۳}\times ۳!}_{\text{جایگاه } c,b,a}\times \overset{\text{جایگاه } b}{۱}\times\underbrace{\binom{۴}{۲}\times ۱}_{\text{جایگاه } d,c}\times\underbrace{\binom{۲}{۲}\times ۱}_{\text{جایگاه } h,g}=۵۶\times ۶\times ۶=۲۰۱۶$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)